第六章無源微波元件

6.1 一端口元件

一端口元件的散射矩陣退化為一個標量，即反射係數S11。一端口元件作為微波系統的終端或協助其他儀器用以測量微波元件的阻抗和散射係數，常用的是匹配負載和短路活塞。前者吸收全部入射功率，等效於在傳輸線上接入其特性阻抗，要求|S11|≈０；後者則反射全部入射功率，且反射波的相位隨短路位置而變化，要求|S11|＝ １。

一、 匹配負載

匹配負載的結構與傳輸線的類型、頻段和功率電平有關。一般由空波導逐步過渡到以損耗材料（帶碳或鐵粉的熱塑塊或沉積在介質基片上的金屬膜）加載的波導所組成。圖６－１示出幾種具體結構。在大功率的情況下，常用水作為吸收材料。當然，必須使用流水，否則會沸騰。

實際上，嚴格的匹配負載是不可能得到的。一個完整的波導負載的駐波比約在1.01與1.05之間。在同軸系統中最優者為1.02左右。

二、 短路活塞

短路活塞是可以移動的終端短路器，對短路活塞的要求是：在整個移動過程中要有良好的短路，短路面的位置恆定，短路處的電阻損耗應非常小；傳輸大功率時，應保證接觸處不發生跳火現象。短路活塞有同軸線型及波導型二種，其中按接觸方式又分為彈簧接觸式和抗流式，彈簧式接觸片的長度可以做成等於λg/４，以便使簧片與管壁的接觸點位於高頻電流的節點，其缺點是當活塞移動時接觸不恒定，而且接觸片容易發生跳火等。因此，目前幾乎全部產品都採用具有抗流裝置的無接觸式短路活塞。抗流式活塞通過兩個１/４波長段的阻抗變換，使得在活塞面處阻抗為零，而且等效短路。如圖６－２（a）和（b）所如圖６－２顯見，在距短路面為l的參考面上，其輸入阻抗Ｚin為

$$Z_{in} = jZ_0 tg\beta l$$

式中，Ｚ０是波導或同軸線的特性阻抗，β＝２π/λg，λg為波導波長。於是，其輸入端反射係數為

$$S_{11} = \frac{Z_{in} - Z_0}{Z_{in} + Z_0} = \frac{jZ_0 tg\beta l - Z_0}{jZ_0 tg\beta l + Z_0} = e^{-j2\beta l} \qquad (6\text{-}1)$$

這表明短路活塞的輸入端反射係數的模等於１，相角是可變的。

6.2 二端口元件

有一個輸入端口又有一個輸出端口的波導元件，稱為二端口元件。在微波技術中，大多數微波元件都是二端口元件，如作為連接元件的各種接口、彎頭；作為匹配元件的電容模片、電感模片和螺釘匹配器等。下面我們先介紹無耗二端口網絡的特性，然後，僅具體介紹兩種二端口元件：衰減器和相移器。

一、 無耗互易二端口網絡的特性

$$|S_{11}|^2 + |S_{12}|^2 = 1 \qquad |S_{11}|^2 + |S_{22}|^2 = 1$$

$$S_{11}S_{12}^* + S_{12}S_{22}^* = 0 \qquad S_{12}S_{11}^* + S_{22}S_{12}^* = 0$$

由此可得

$$|S_{11}| = |S_{22}| \qquad (6\text{-}2a)$$

和

$$|S_{11}||S_{12}|e^{j(\theta_{11}-\theta_{12})} + |S_{12}||S_{22}|e^{j(\theta_{12}-\theta_{22})} = 0$$

將（6-2a）代入上式，得

$$e^{j(\theta_{11}-\theta_{12})} + e^{j(\theta_{12}-\theta_{22})} = 0$$

從而，可得

$$(\theta_{11} - \theta_{12}) = \pi + (\theta_{12} - \theta_{22})$$

式中，θ11，θ12為反射係數S11， S22的相角，可以適當選擇端口1和2參考面的位置，以使θ11=θ22，則有

$$\theta_{11} = \theta_{22} = \theta_{12} + \frac{\pi}{2} \qquad \text{(6-2b)}$$

式（6-2）表明，無耗互易二口網絡的S參量只有二個是獨立的，即|S11|和θ11，其它四個參量|S22|，θ22，|S12|，θ12均可由它們導出。特別需要指出的是式（6－2a）的物理意義，它表明，一個無耗，互易的二口傳輸元件，不論其結構是否對稱，都有|S11|＝|S22|即兩個端口的反射係數大小相等。這一結論從直觀上是不易得出的。

而對於有耗的二端口網絡，只有在結構完全對稱時，才有|S11|＝ |S22|。此外，我們還可以得出：若無耗二端口網絡的一個端口是匹配的，即S11＝0，則自然有S22＝0，反之亦然。這樣一來，一個匹配的無耗二端口網絡，必然是全傳輸的，即|S12|＝1。

二、二端口網絡工作特性參量

就原理上而言，n端口微波網絡可等效為一個個的二端口網絡來研究，因此我們僅介紹二端口網絡的工作特性參量。

1．電壓傳輸係數T

電壓傳輸係數T定義為網絡輸出端接匹配負載時，輸出端與輸入端參考面上的反射波電壓b2與入射波a1之比，即

$$T = \frac{b_2}{b_1}\bigg|_{a_2=0} = S_{21} \qquad \text{(6-3)}$$

2.插入衰減L

插入衰減L定義為端口2接匹配負載時，端口1的輸入波功率Pi與負載吸收功率Pl之比，即

$$L = \frac{P_i}{P_l}\bigg|_{a_2=0} = \frac{\frac{1}{2}|a_1|^2}{\frac{1}{2}|b_2|^2}\bigg|_{a_2=0} = \frac{1}{|S_{21}|^2}$$

用分貝表示時，可寫成

$$\begin{aligned} A &= 10\lg \frac{P_i}{P_l}\bigg|_{a_2=0} = 10\lg \frac{1}{|S_{21}|^2} \\ &= 10\lg \frac{1-|S_{11}|^2}{|S_{21}|^2} + 10\lg\left(\frac{1}{1-|S_{11}|^2}\right) \end{aligned} \qquad \text{(6-4)}$$

可見，網絡的插入衰減由兩項組成。對於無耗網絡，由於,故式（6-4）的第一項為零。這表明，它是由網絡內部的損耗而引起的吸收衰減。式（6-4）的第二項表示網絡輸入端與傳輸線不匹配而引起的反射衰減。若網絡匹配，即S11＝0，則第二項也為零。在一般情況下，網絡的插入衰減為吸收衰減和反射衰減之和。

3．插入相移θ

網絡的插入相移θ定義為當輸出端接匹配負載時，輸出端參考面上的b2與輸入端參考面上的a1相位之差，即

$$\theta = \arg b_2 - \arg a_1 = \arg\left(\frac{b_2}{a_1}\bigg|_{a_2=0}\right) = \arg S_{21} \qquad \text{(6-5)}$$

4．輸入駐波比

當網絡的端口2接匹配負載時，從端口1測得的駐波比ρ稱為端口1的輸入駐波比。因為網絡端口1的電壓反射係數的模|Γ1|=|S11|，故有

$$\rho = \frac{1+|\Gamma_1|}{1-|\Gamma_1|} = \frac{1+|S_{11}|}{1-|S_{11}|} \qquad \text{(6-6)}$$

可見，網絡的工作特性參量均與網絡的散射參量有關。這樣，若能確定散射參量，則可計算出工作特性參量。

三、 衰減器和移相器

衰減器和移相器用來改變傳輸的電磁波的功率和相位。一般說來，對衰減器並不苛求其相位關係，而對移相器則要求不引入附加的衰減，它們都可以做成固定式和可調式。

1．衰減器

傳輸線中電磁能量被衰減的原因不外乎是吸收、反射和截止三種。因此衰減器在原理上可以分為吸收式和截止式兩類。衰減器的主要用途是：

（1）控制功率電平的大小；

（2）作為比較功率電平的相對標準；

（3）作為小功率微波系統（振盪器與其它部件以及各種部件之間）的去耦隔離元件，以減少相互影響。理想的衰減器應是只有衰減而無相移的二端口網絡，其散射矩陣為

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & e^{-\alpha l} \\ e^{-\alpha l} & 0 \end{bmatrix}$$

式中，為衰減係數，l為衰減器的長度。

（a）吸收式衰減器

吸收式衰減器是放有吸收片的波導段，分橫向可調和垂直可調兩種，如圖6－3所示，吸收片是鍍鎳鉻薄膜的玻璃片，其兩端有劈型過渡段，以實現阻抗匹配。當吸收片由波導窄邊移向波導中央（圖6-3a）時或從波導寬壁中央深入到波導中（圖6－3b）時，衰減加大。吸收式衰減器的技術指標是：起始衰減量、最大衰減量和輸入、輸出端的駐波比、衰減精度及工作頻帶等。

另一種吸收衰減器是所謂旋轉極化式標準衰減器，如圖6－4所示，其主體式一段圓波導，其中有一吸收片可以連同圓波導一起旋轉，兩端都有一段方圓過渡波導，用來連接H10矩形波導。過渡波導也各有一平行與矩形波導寬邊的固定吸收片。

進入矩形波導的H10波，經過渡波導而轉換成圓波導中的TE11波，由於其電場E1垂直與吸收片1的平面，因此不受其衰減，反而使極化方向獲得固定，但當波進入圓波導段後，如果吸收片2與TE11波電場極化方向（y方向）成θ角，則此電場將分解為二個TE11波，，其極化方向分別沿u和v向。根據式（2－79），在略去因子exp（－jβz）後，我們有

$$\vec{E}_1 = -j\frac{\omega\mu}{k_c^2 r}H_0 J_1\left(\frac{1.841}{a}r\right)\cos\varphi\vec{u}_r + j\frac{\omega\mu}{k_c}H_0 J_1{}'\left(\frac{1.841}{a}r\right)\sin\varphi\vec{u}_\varphi \qquad (6\text{-}7)$$

然而

$$\sin\varphi = \sin(\varphi-\theta+\theta) = \cos\theta\sin(\varphi-\theta)+\sin\theta\cos(\varphi-\theta)$$
$$\cos\varphi = \cos(\varphi-\theta+\theta) = \cos\theta\cos(\varphi-\theta)-\sin\theta\sin(\varphi-\theta)$$

因此，有

$$\vec{E}_1 = \cos\theta\left[-j\frac{\omega\mu}{k_c^2 r}H_0 J_1\left(\frac{1.841}{a}r\right)\cos(\varphi-\theta)\vec{u}_r + j\frac{\omega\mu}{k_c}H_0 J_1{}'\left(\frac{1.841}{a}r\right)\sin(\varphi-\theta)\vec{u}_\varphi\right]$$
$$+\sin\theta\left[j\frac{\omega\mu}{k_c^2 r}H_0 J_1\left(\frac{1.841}{a}r\right)\sin(\varphi-\theta)\vec{u}_r - j\frac{\omega\mu}{k_c}H_0 J_1{}'\left(\frac{1.841}{a}r\right)\cos(\varphi-\theta)\vec{u}_\varphi\right]$$

式中，第一項是TE11波沿u方向極化的電場，被電阻片2吸收，而第二項波是TE11沿v方向極化的電場，可傳輸到輸出過渡波導。由於此過渡波導中的電阻片3是沿x向的，因此，又得將傳輸場分解為二部分，即

$$\vec{E}_1=\sin\theta\left[j\frac{\omega\mu}{k_c^2 r}H_0J_1\left(\frac{1.841}{a}r\right)\sin(\varphi-\theta)\vec{u}_r-j\frac{\omega\mu}{k_c}H_0J_1'\left(\frac{1.841}{a}r\right)\cos(\varphi-\theta)\vec{u}_\varphi\right]$$
$$=\sin^2\theta\left[-j\frac{\omega\mu}{k_c^2 r}H_0J_1\left(\frac{1.841}{a}r\right)\cos\varphi\vec{u}_r+j\frac{\omega\mu}{k_c}H_0J_1'\left(\frac{1.841}{a}r\right)\sin\varphi\vec{u}_\varphi\right]$$
$$+\sin\theta\cos\theta\left[j\frac{\omega\mu}{k_c^2 r}H_0J_1\left(\frac{1.841}{a}r\right)\sin\varphi\vec{u}_r-j\frac{\omega\mu}{k_c}H_0J_1'\left(\frac{1.841}{a}r\right)\cos\varphi\vec{u}_\varphi\right]$$

式中，第一項是TE11波沿y向極化的電場，是可輸出的波，而第二項則被電阻片3吸收，因而，有

$$\vec{E}_3=\sin^2\theta\left[-j\frac{\omega\mu}{k_c^2 r}H_0J_1\left(\frac{1.841}{a}r\right)\cos\varphi\vec{u}_r+j\frac{\omega\mu}{k_c}H_0J_1'\left(\frac{1.841}{a}r\right)\sin\varphi\vec{u}_\varphi\right]$$
$$=\sin^2\theta\vec{E}_1 \qquad \text{(6-8)}$$

由於功率正比於電場強度的平方，相應衰減量由下式給出：

$$A=10\lg\frac{P_1}{P_3}=10\lg\left(\frac{E_1}{E_3}\right)^2=-40\lg(\sin\theta)dB$$

　　這種衰減器可以由嚴格控制旋轉角度來精確定標衰減量，故可用作標準衰減器。當θ從90°～0°變化時，衰減量可以從0°～∞分貝變化。

（b）截止衰減器

　截止式衰減器也叫做過極限衰減器。圖6－5是工作於圓波導TE11波的截止式衰減器結構，其主體是一段處於截止狀態的圓波導，選擇圓波導的半徑滿足條件

$$\lambda\gg\lambda_c=3.14R$$

其中λ是工作波長，λc是TE11波的截止波長，由於TE11是圓波導中最低的模式，如果H°11截止，其它高次模式也將全部截止。這時（忽略波導的衰減）傳輸係數：

$$\gamma=j\beta=j\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}=\frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2-1}\approx\frac{2\pi}{\lambda_c}=a$$

如果衰減段的圓波導長度為l，則衰減量為

$$A=al\approx\frac{2\pi}{\lambda_c}l \qquad \text{(6-10)}$$

　　即衰減量於l成線性關係，因此也可作為衰減的標準。這種衰減器並不吸收電磁能量，其實質是通過截止波導將電磁能量反射回去，稱反射式衰減器。因此，其輸入和輸出端的反射都將很大，使匹配性能變壞。為了改善匹配，在其輸入同軸線的終端接以匹配負載，而輸出同軸線的耦合小環上安裝一個電阻並使阻值R＝Z0（同軸線特性阻抗），從而能夠獲得匹配。這種衰減器很方便定標。令耦合環的起始位置z＝0，其輸出功率P（0）＝P0，則小環移動行程l時，其輸出功率為

$$P_2=P(l)=P_0e^{-2al}$$

設輸入功率為P1，則衰減量為

$$A(l)=10g\frac{P_1}{P_2}=10g\left[\frac{P_1}{P_0}\bullet\frac{P_0}{P_2}\right]$$
$$=10g\frac{P_1}{P_2}+10ge^{2al}=A(0)+8.68aldB \qquad \text{(6-11)}$$

其中A（0）為z＝0時的起始衰減量。

2．移相器

理想的移相器是一個無反射、無衰減而相移為固定或可變的二端口網絡，其散射矩陣為

$$[S]=\begin{bmatrix} 0 & e^{-j\theta} \\ e^{-j\theta} & 0 \end{bmatrix}$$

移相器用以改變波的相位移θ＝βl，這可以從改變波導或傳輸線的長度l或改變相位常數β來達到。後者，由於β＝ω/υp，也就是改變相速υp。最常用的辦法，是在波導段內部分填充εr>1的電介質，以改變相速度υp。填充的介質可以是片形的，也可以是塊形的，具體結構與衰減器類似，只是將吸收片代換以低損耗介質（如石英、氧化鋁陶瓷、聚四氟乙烯材料等）而已。下面僅介紹旋轉式移相器。旋轉式移相器類似旋轉式衰減器，不同的是旋轉段中的電阻代之以半波長介質片，兩端的電阻片代之以四分之一
波長的介質片，如圖6－6所示。

當一個線性極化波經過λ/4片後，就變成圓極化波，這種圓極化波具有x向和y向電場分量，它們的大小相等，但相差90°。當TE11波的極化方向平行於介質片時，相速減少，其傳播常數β1變大，而垂直於介質片時，其傳播常數β2則不變，故有β1>>β2。選擇λ/4片的長度l，以使$(\beta_1-\beta_2)l=90^\circ$，為使介質片引起的反射減至最小，片用劈形過渡，中心片有類似結構，但相移為。在旋轉移相器中，λ/4片與矩形波導寬邊成角。這樣，與旋轉式衰減器的分析類似，一個如圖6－7所示的TE11波的場，經過移相器後，其輸出波就變成

$$\vec{E}_3=j\frac{\omega\mu H_0}{k_c r}\exp\left(-j4\beta_1 l-j2\theta\right)\left[-j\frac{J_1}{k_c r}\vec{u}_r\cos\varphi+J_1{}'\vec{u}_\varphi\sin\varphi\right] \quad (6\text{-}12)$$

這是一個與入射波有相同極化方向的線性極化TE11波，但其相位已改變了。這樣，λ/2片旋轉θ角就可以使通過移相器波產生2θ的相移。$(\beta_1-\beta_2)l=90^\circ$

6.3 三端口元件

6.4 四端口元件

一、無耗互易四端口網絡元件的特性

無耗互易四端口網絡元件的特性於三端口網絡元件的特性相比有著本質的區別，它的S_{11}，S_{22}，S_{33}和S_{44}可以同時為零；而且，若一四端口網絡能實現S_{11}，S_{22}，S_{33}和S_{44}同時為零，則此四端口網絡一定是一個“定向耦合器”，即其中的功率傳輸是有方向性的：當功率從一個端口輸入時，有的端口有輸出（稱為有耦合），有的端口無輸出（稱為無耦合或隔離）。如圖6-12所示，若選擇端口1為輸入端口，則必有$S_{13}=S_{24}=0$或$S_{14}=S_{23}=0$或$S_{12}=S_{34}=0$。

其證明如下：根據所設條件（S_{11}，S_{22}，S_{33}和S_{44}均為零），此網絡的[S]矩陣為：

$$[S]=\begin{bmatrix} 0 & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & 0 & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & 0 & S_{34} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & 0 \end{bmatrix}$$

於是，由互易無耗條件：$[S^*][S]=[1]$，可得

$$|S_{12}|^2+|S_{13}|^2+|S_{14}|^2=1 \quad (6\text{-}23a)$$

$$|S_{12}|^2+|S_{23}|^2+|S_{24}|^2=1 \quad (6\text{-}23b)$$

$$|S_{13}|^2 + |S_{23}|^2 + |S_{34}|^2 = 1 \quad (6\text{-}23c)$$

$$|S_{14}|^2 + |S_{24}|^2 + |S_{34}|^2 = 1 \quad (6\text{-}23d)$$

$$S_{12}^* S_{23} + S_{14}^* S_{34} = 0 \quad (6\text{-}23e)$$

$$S_{14}^* S_{12} + S_{34}^* S_{23} = 0 \quad (6\text{-}23f)$$

式（6-23a）減去（6-23b）；式（6-23c）減去（6-23d），可得

$$|S_{13}|^2 + |S_{14}|^2 - |S_{23}|^2 - |S_{24}|^2 = 0 \quad (6\text{-}24a)$$

$$|S_{13}|^2 + |S_{23}|^2 - |S_{14}|^2 - |S_{24}|^2 = 0 \quad (6\text{-}24b)$$

把上兩式相加，得

$$|S_{13}|^2 = |S_{24}|^2 \quad (6\text{-}25)$$

將式（6-25）代入式（6-24），得

$$|S_{14}|^2 = |S_{23}|^2 \quad (6\text{-}26)$$

現在，我們適當選擇2，3和4中的參考面，使參數S_{12}，S_{34}為正實數，而S_{14}為純虛數。這樣式（6-23e）、式（6- 23f）變成

$$S_{12}S_{23} - S_{14}S_{34} = 0 \quad (6\text{-}27a)$$

$$-S_{12}S_{14} + S_{34}S_{23} = 0 \quad (6\text{-}27b)$$

式（6-27a）乘以S_{12}，式（6-27b）乘以S_{34}，然後相減得

$$\left(S_{12}^2 - S_{34}^2\right) S_{23} = 0 \quad (6\text{-}28)$$

式（6-28）將表明網絡一定是定向耦合器。下面分兩種情況證明：

（1）若$S_{23}=0$，則由式（6-26）得

$$S_{14} = S_{23} = 0$$

顯然，這是一個定向耦合器·

（2）若$S_{12}^2 - S_{34}^2 = 0$，則由於參考面的選擇，知

$$S_{12} = S_{34} = \alpha(\text{正实数})$$

代入式（6-27a）,得

$$S_{23} = S_{14} = j\beta(\text{纯虚数})$$

於是，此時[S]矩陣變為

$$[S]=\begin{bmatrix} 0 & a & S_{13} & j\beta \\ a & 0 & j\beta & S_{24} \\ S_{13} & j\beta & 0 & a \\ j\beta & S_{24} & a & 0 \end{bmatrix}$$

再利用[S*][S]=[1],可得

$$j\beta S_{13}^{*} - j\beta S_{24} = 0$$
$$aS_{13}^{*} + aS_{24} = 0$$

由這一對方程可知，若α，β都不為零，則必有

$$S_{13}=0, S_{24}=0$$

若α＝0，則有

$$S_{12}=0, S_{34}=0$$

若β＝0，則有

$$S_{23}=0, S_{14}=0$$

可見，無論在哪種情況下，一個四端口完全匹配的無耗互易網絡，一定是一個定向耦合器。

二、波導定向耦合器

1. 定向耦合器的參數

定向耦合器是微波系統中應用最廣泛的元件：它用來提取波導系統中的部分能量以便監視該系統的功率、頻率和匹配情況，或觀察脈衝形狀和比較相位，或用在微波鑑頻器中以穩定微波源，有時在微波接收系統中，用以向微波系統引入本機振盪能量。

定向耦合器的種類繁多，結構迥異，分析方法也不盡相同，按傳輸線類型分，有波導定向耦合器、同軸線定向耦合器、帶狀線或微帶定向耦合器等；按耦合輸出方向分，有同向定向耦合器和反向定向耦合器等；按耦合強弱分，有強耦合定向耦合器和弱耦合定向耦合器等；……。儘管如此，所以類型的定向耦合器都有共通的特性：當其中一端口有微波能輸入時，其餘三端口之一應無輸出，即

$$S_{13}=S_{24}=0, \text{或} S_{14}=S_{23}=0 \text{或} S_{12}=S_{34}=0$$

由於實際的定向耦合器不可能完全理想，即

$$S_{13}\neq 0, \text{或} S_{14}\neq 0 \quad \text{或} S_{12}\neq 0$$

為了描述定向耦合器性能的優劣，一般使用如下的兩個主要指標：

（1）過渡衰減C

過渡衰減C定義為主線(1-2)的輸入功率$P_{入}$與副線（3-4）的耦合臂（副線中取出能量的端口）輸出功率$P_{耦}$之比，並用分貝表示為：

$$C=10\lg\frac{P_{入}}{P_{耦}}(dB) \tag{6-29}$$

注意到圖6-12中定向耦合器端口1輸入的歸一化入射波電壓為a_1，端口4（或端口3）的耦合輸出的歸一化反射波電壓為b_4（或b_3），則

$$\frac{P_{入}}{P_{耦}}=\left|\frac{a_1}{b_4}\right|^2\left(或\left|\frac{a_1}{b_3}\right|^2\right)$$
$$=\left|\frac{1}{S_{41}}\right|^2\left(或\left|\frac{1}{S_{31}}\right|^2\right)$$

因而

$$C=-20\lg\left|S_{41}\right|(或\left|S_{31}\right|)(dB) \quad (6\text{-}30)$$

由上述可見，當$P_{入}$一定時，$P_{耦}$愈小，則過渡衰減愈大。通常定向耦合器C的典型值為3dB，6dB，10dB和20dB。

2. 方向性D

方向性D定義為副線中的耦合臂輸出功率$P_{耦}$與隔離臂（不希望有能量輸出的端口）的輸出功率$P_{隔}$之比，並用分貝表示，即

$$D=10\lg\frac{P_{入}}{P_{耦}}(dB)$$
$$=20\lg\left|\frac{b_4}{b_3}\right|\left(或\left|\frac{b_3}{b_4}\right|\right)(dB)$$
$$=20\lg\left|\frac{S_{41}}{S_{31}}\right|\left(或\left|\frac{S_{31}}{S_{41}}\right|\right)(dB) \quad (6\text{-}31)$$

顯然，耦合到隔離臂的功率$P_{隔}$愈小，方向性愈大。在理想的情況下，$P_{隔}\to 0$，$D\to\infty$。但因設計的原因和加工的不完善，方向性不會無窮大；各端口也不可能完全匹配，且隨著工作波長的改變，其性能也有所不同。因此，在實際使用中判斷一個定向耦合器性能的優劣，除了上述兩個指標外，還有看工作頻率是否寬，各端口的輸入駐波比是否小。

2．波導定向耦合器的簡要理論

圖6-13為槽孔耦合的波導定向耦合器。當主波導1-2有單位功率的H_{10}模波：

$$E_y=-j\sqrt{2\eta}\sqrt{\frac{\lambda_g}{\lambda}}\frac{1}{\sqrt{ab}}\sin\frac{\pi x}{a}$$
$$H_x=j\sqrt{\frac{2}{\eta}}\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_g}}\frac{1}{\sqrt{ab}}\sin\frac{\pi x}{a}$$
$$H_z=\sqrt{\frac{1}{2\eta}}\sqrt{\lambda\lambda_g}\frac{1}{a\sqrt{ab}}\cos\frac{\pi x}{a} \quad (6\text{-}32)$$

（利用功率歸一化條件，即式（5-4）和(2-59)求出待定常數H_0，再將H_0代入式（2-59）即可求得此場分量。）從1端口輸入時，通過波導公共壁上的耦合槽孔，主波導中的波將藉助於$\vec{l}$，$\vec{t}$方向的磁場耦合和$\vec{n}$方向的電場耦合（圖6- 14）而耦合到副波導3-4中去，結果，在副波導中就激勵起兩個方向相反的行波，在離耦合孔足夠遠處，其場分量可表為

$$E_y = -a_{\pm} j\sqrt{2\eta}\sqrt{\frac{\lambda_g}{\lambda}}\frac{1}{\sqrt{ab}}\sin\frac{\pi x}{a}$$
$$H_x = \pm a_{\pm} j\sqrt{\frac{2}{\eta}}\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_g}}\frac{1}{\sqrt{ab}}\sin\frac{\pi x}{a}$$
$$H_z = a_{\pm}\sqrt{\frac{1}{2\eta}}\sqrt{\lambda\lambda_g}\frac{1}{a\sqrt{ab}}\cos\frac{\pi x}{a} \quad (6\text{-}33)$$

式（6-33）中，$a_{\pm}$是主波導中的波分別在副波導中的$\pm$ z方向的傳輸係數，它們的值可將耦合孔的作用等效為一個電偶極子和一個磁耦極子而求得：

$$a_{\pm} = j\frac{\omega}{2}\left[\mu_0 M_l \vec{l}\left(\vec{l}\bullet\vec{H}_1^0\right)\bullet\vec{H}_{2\pm}^{0*} + \mu_0 M_t \vec{t}\left(\vec{t}\bullet\vec{H}_1^0\right)\bullet\vec{H}_{2\pm}^{0*} - \varepsilon_0 P\vec{n}\left(\vec{n}\bullet\vec{E}_2^0\right)\vec{E}_{2\pm}^{0*}\right] \quad (6\text{-}34)$$

式中$\vec{E}_1^0$，$\vec{H}_1^0$為小孔不存在時，主波導小孔中心處的場；$\vec{E}_{2\pm}^0$、$\vec{H}_{2\pm}^0$為小孔不存在時，副波導小孔中心處$\pm$ z方向的場；M_t，M_l為沿小孔局部坐標$\vec{t}$、$\vec{l}$方向的磁極化率；P為$\vec{n}$方向的電極化率；*表示複數共軛。形狀不同的槽孔，其極化率不同，如表6-1所示。

必須指出，式（6-34）僅適用於波導公共壁厚為零的情況。否則，式（3-34）中的每一項需乘上衰減因子，即

$$a_{\pm} = j\frac{\omega}{2}\left[F_{ml}\mu_0 M_l \vec{l}\left(\vec{l}\bullet\vec{H}_1^0\right)\bullet\vec{H}_{2\pm}^{0*} + F_{ml}\mu_0 M_t \vec{t}\left(\vec{t}\bullet\vec{H}_1^0\right)\bullet\vec{H}_{2\pm}^{0*} - F_{ml}\varepsilon_0 P\vec{n}\left(\vec{n}\bullet\vec{E}_2^0\right)\vec{E}_{2\pm}^{0*}\right] \quad (6\text{-}35)$$

式中，F_{ml}，F_{mt}及F_e為衰減因子。將耦合槽孔視為一段過極限波導，就可求出這些衰減因子。當壁厚為δ時，對於圓形耦合孔，有

$$F_{ml} = F_{ml} = \exp\left[-2\pi\sqrt{\left(-\frac{1}{3.41r}\right)^2 - \frac{1}{\lambda^2}}\bullet\delta\right]$$
$$F_e = \exp\left[-2\pi\sqrt{\left(\frac{1}{2.62r}\right)^2 - \frac{1}{\lambda^2}}\bullet\delta\right] \quad (6\text{-}36a)$$

對於長窄橢圓孔，有

$$F_{ml} = \exp\left[-2\pi\sqrt{\left(\frac{1}{4l}\right)^2 - \frac{1}{\lambda^2}}\bullet\delta\right]$$
$$F_{ml} = \exp\left[-2\pi\sqrt{\left(\frac{1}{4d}\right)^2 - \frac{1}{\lambda^2}}\bullet\delta\right]$$
$$F_e = \exp\left[-2\pi\sqrt{\left(\frac{1}{4l}\right)^2 + \left(\frac{1}{4d}\right)^2 - \frac{1}{\lambda^2}}\bullet\delta\right] \quad (6\text{-}36b)$$

3．單孔定向耦合器

(1)耦合孔在波導寬壁上

考慮二矩形波導寬壁上的小孔耦合，如圖6-15所示。設主、副波導的坐標系和小孔的局部坐標系分別為（ x,y,z），(x ' ,y ' ,z ')和（l,n,t）。為一般起見，令主、副波導縱軸交角為φ，耦合孔位於公共壁對角線上，其中心在距側壁x_o處，且其l軸與z軸的夾角為ψ。在這種情況下，因為$\vec{H}_1^0 = H_x\vec{x} + H_z\vec{z}$，所以

$$\vec{t}\cdot\vec{H}_1^0 = H_z^0\vec{t}\cdot\vec{x} + \vec{H}_z^0\vec{t}\cdot\vec{z} = -H_x^0\cos(\varphi-\psi) + H_x^0\sin(\varphi-\psi)$$
$$\vec{l}\cdot\vec{H}_1^0 = H_x^0\vec{l}\cdot\vec{x} + \vec{H}_x^0\vec{l}\cdot\vec{z} = H_x^0\sin(\varphi-\psi) + H_x^0\cos(\varphi-\psi)$$

而

$$\vec{E}_1^0 = E_y^0\vec{y}, \vec{n}\cdot\vec{E}_1^0 = E_1^0\vec{n}\cdot\vec{y} = E_y^0$$

又因為

$$\vec{H}_{2\pm}^0 = \vec{x}H_{x'\pm}^0 + \vec{z}H_{x'\pm}^0$$
$$\vec{H}_{2\pm}^{0*} = -\vec{x}H_{x'\pm}^0 + \vec{z}H_{x'\pm}^0$$

所以

$$\vec{t}\cdot\vec{H}_{2\pm}^{0*} = H_{x'\pm}^0\cos\psi - H_{x'\pm}^0\sin\psi$$
$$\vec{l}\cdot\vec{H}_{2\pm}^{0*} = H_{x'\pm}^0\sin\psi + H_{x'\pm}^0\cos\psi$$

而

$$\vec{E}_{2\pm}^{0*} = -\vec{n}E_{y\pm}^0, \vec{n}\cdot\vec{E}_{2\pm}^{0*} = -E_{y\pm}^0$$

將上述各式代入（6-34）,經整理得

$$a_\pm = j\frac{\omega}{2}\left\{\frac{\mu_0}{2}\left[(M_l-M_i)P_\pm\sin 2\psi + (M_l-M_i)(Q_\pm+R_\pm)\cos 2\psi + (R_\pm-Q_\pm)(M_i+M_l)\right] + \varepsilon_0 PE_y^0E_{y'\pm}^0\right\} \quad (6\text{-}47)$$

式中

$$P_\pm = (H_z^0H_{x'\pm}^0 - H_x^0H_{x'\pm}^0)\cos\varphi + (H_z^0H_{z'\pm}^0 - H_x^0H_{x'\pm}^0)\sin\varphi$$
$$Q_\pm = H_{x'\pm}^0(H_x^0\cos\varphi - H_z^0\sin\varphi)$$
$$R_\pm = H_{z'\pm}^0(H_z^0\sin\varphi + H_x^0\cos\varphi) \quad (6\text{-}38)$$

現就如圖6-16所示三種耦合孔情況，討論如下。

(a)Bethe孔定向耦合器

當耦合孔為處於 $x_o = a/2$ 的圓孔（圖6-16(a)）時，有 $M_l = M_t = 2P$，且可認為 $\psi = 0$，則式(6-37)變成

$$a\pm = j\frac{\omega}{2}\left[\mu_0 M_l(R_\pm - Q_\pm) + \varepsilon_0 PE_y^0E_{y'\pm}^0\right] \quad (6\text{-}39)$$

考慮到在副波導 $x_o = a/2$ 處，沿 $\pm z'$ 方向的行波為

$$E^0_{y'\pm} = E^0_y = -j\sqrt{2\eta}\sqrt{\frac{\lambda_g}{\lambda}}\frac{1}{\sqrt{ab}}\sin\frac{\pi x_0}{a}$$
$$= -j\sqrt{2\eta}\sqrt{\frac{\lambda_g}{\lambda}}\frac{1}{\sqrt{ab}}$$
$$H^0_{x'\pm} = \pm H^0_x = \pm j\sqrt{\frac{2}{\eta}}\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_g}}\frac{1}{\sqrt{ab}}\sin\frac{\pi x_0}{a}$$
$$= \pm j\sqrt{\frac{2}{\eta}}\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_g}}\frac{1}{\sqrt{ab}}$$
$$H^0_{z'\pm} = H^0_z = \sqrt{\frac{1}{2\eta}}\sqrt{\lambda\lambda_g}\frac{1}{a\sqrt{ab}}\cos\frac{\pi x_0}{a}$$
$$= 0$$

所以，有

$$Q_\pm = \mp\frac{2}{\eta}\frac{\lambda}{\lambda_g}\frac{1}{ab}\cos\varphi, R_\pm = 0$$

將上述關係諸關係代入式(6-39),可得

$$a_+ = j\frac{\omega}{2}\frac{M_l}{ab}\{2\mu_0\frac{1}{\eta}\frac{\lambda}{\lambda_g}\cos\varphi - \varepsilon_0\eta\frac{\lambda_g}{\lambda}\} = S_{41}$$
$$a_- = -j\frac{\omega}{2}\frac{M_l}{ab}\{2\mu_0\frac{1}{\eta}\frac{\lambda}{\lambda_g}\cos\varphi + \varepsilon_0\eta\frac{\lambda_g}{\lambda}\} = S_{31}$$

可見，副波導中向兩個相反端口傳輸的波的大小是不相等，且

$$|S_{31}| = |a_-| > |S_{41}| = |a_+|$$

從而，由式（6-30）和(6-31)可得

$$D = 20\lg\left|\frac{\cos\varphi + \frac{1}{2}(\frac{\lambda_g}{\lambda})^2}{\cos\varphi - \frac{1}{2}(\frac{\lambda_g}{\lambda})^2}\right| \quad (6\text{-}40)$$

$$C = -20\lg|S_{31}| = -20\lg\frac{8\pi r^3}{3ab\lambda_g}\left[\cos\varphi + \frac{1}{2}(\frac{\lambda_g}{\lambda})^2\right] \quad (6\text{-}41)$$

由式（6-40）可知，這種反向定向耦合器當 $\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_g}{\lambda}\right)^2$ 时，即

$$\lambda = \sqrt{\frac{2a^2(2\cos\varphi - 1)}{\cos\varphi}}$$

可以得到理想的方向性。若 $\varphi = 0$，則理想方向性的條件是

$$\lambda = \sqrt{2}a$$

這種定向耦合器的優點是結構簡單，其缺點是D及C隨波長變化大，頻帶窄，它主要用於10厘米波段。

(b)十字槽定向耦合器

圖（6-16(b)）是十字定向耦合器，其主、副波導正交，即 $\varphi = 90^\circ$。十字槽位於對角線、且距波導壁 x_0 處。十字槽的耦合作用可看作 $\psi = 90^\circ$ 的長窄橢圓孔1和 $\psi = 0$ 的長窄橢圓孔2分別耦合作用的迭加。這樣，根據式（6-37）,我們可寫出

$$a_{\pm}^{(1)} = j\frac{\omega}{2}\{\frac{\mu_0}{2}\left[-(M_l - M_t)(R_{\pm} + Q_{\pm}) + (M_l + M_t)(R_{\pm} - Q_{\pm})\right] + \varepsilon_0 P E_y^0 E_{y'\pm}^0\}$$
$$a_{\pm}^{(2)} = j\frac{\omega}{2}\{\frac{\mu_0}{2}\left[(M_l - M_t)(R_{\pm} + Q_{\pm}) + (M_l + M_t)(R_{\pm} - Q_{\pm})\right] + \varepsilon_0 P E_y^0 E_{y'\pm}^0\}$$

從而，有

$$A_{\pm} = a_{\pm}^{(1)} + a_{\pm}^{(1)} = j\frac{\omega}{2}\left[\mu_0(M_l + M_t)(R_{\pm} - Q_{\pm}) + 2\varepsilon_0 P E_y E_{y'\pm}^0\right]$$

而根據式（6-38）,有

$$Q_{\pm} = -H_{x'\pm}^0 H_{x'}^0 = \mp H_z^0 H_z^0$$
$$R_{\pm} = H_{x'\pm}^0 H_x^0 = H_x^0 H_x^0$$
$$E_{y'\pm}^0 = E_y^0$$

最後，可得

$$A_+ = j\omega\left[\mu_0(M_l + M_t)H_x^0 H_z^0 + \varepsilon_0 P E_y^0 E_y^0\right]$$
$$A_- = j\omega\varepsilon_0 P E_y^0 E_y^0 \qquad (6\text{-}42)$$

對於窄長橢圓孔來說，由於$\vec{t}$方向的磁耦合和$\vec{n}$方向的電耦合都很弱，可以忽略不計。於是，式(6-42)變為

$$A_+ = j\omega\mu_0 M_l H_z^0 H_z^0 = \frac{\pi M_l}{a^2 b}\sin\frac{2\pi x_0}{a}$$
$$A_- = 0$$

由此可得十字槽定向耦合方向性和過渡衰減分別為

$$D \approx \infty$$
$$C = -20\lg|A_+| = -20\lg(\frac{\pi M_l}{a^2 b}\sin\frac{2\pi x_0}{a}) \qquad (6\text{-}43)$$

十字槽定向耦合器具有結構緊湊、方向性高、頻帶寬和過渡衰減幾為恆定等優點，但其過渡衰減太大以致一般不能利用。採用圖6-17所示的雙十字槽，其過渡衰減為

$$C = -20\lg\left(\frac{2\pi M_l}{a^2 b}\sin\frac{2\pi x_0}{a}\sin\frac{2\pi d}{\lambda_g}\right)$$

雖可降低約6分貝的衰減，但還不能滿足實際需要。為了進一步降低過渡衰減，本書作者採用圖（6-18）所示星形槽孔。它是在x_0處開有N個窄長橢圓槽組成，（為作圖方便，用一粗線代表一窄長槽。）由於這種槽孔向周圍發出2N條射線的星星，故而得名。對於這種耦合器，經分析，近似有

$$A_+ = j\frac{\omega}{2}\mu_0 M_l H_x^0 N = \frac{\pi M_l N}{2a^2 b}\sin\frac{2\pi x_0}{a}$$
$$A_- = 0 \qquad (6\text{-}44)$$

由此可得

$$D \approx \infty$$
$$C = -20\lg|A_+| = C_0 - 20\lg\frac{N}{2} \qquad (6\text{-}45)$$

式（6-45）中 $C_0=-20\lg\frac{\pi M_1}{a^2b}\sin\frac{2\pi x_0}{a}$ 就是通常的單十字槽定向耦合器（圖6-16(b)）的過渡衰減。

由式(6-45)，可以得出結論：

①星形槽交叉波導定向耦合器像通常的正在定向耦合器一樣，有著結構緊湊、頻帶寬的優點，其過渡衰減又可藉選取適當的M值而降低，這就克服了十字槽定向耦合器的 缺點。
②當N＝2時，星形槽路回去就退化為十字槽耦合器。

③由於 ψ_0 的任意性，且它又不包含於最終的表示式中，故這種耦合器的特性與星形槽相對於波導軸的取向無關。通常正置（圖6-16(b)）與斜置（圖6-19）的十字槽耦合器有相同的特性，就是這一結論的實例。
④當N→∞的極限情況下，星形槽耦合器就過渡為圓孔槽耦合器（圖6-20）,它有較低的方向性，由此可見，借N來降低衰減是有限度的，充其量而言，它所能達到的最低衰減量就是圓孔耦合器的衰減量。這樣，為了獲得足夠低衰減量非採用多元耦合不可。

為了進一步降低星形槽耦合器的衰減可以採用雙星形槽的辦法。經分析，雙星形槽耦合器的過渡衰減為

$$C=C_0'-20\lg\frac{N}{2} \quad (6\text{-}46)$$

式中

$$C_0'=-20\lg\frac{2\pi M_l}{a^2b}\sin\frac{2\pi x_0}{a}\bullet\sin\frac{2\pi(a-2x_0)}{\lambda_g} \quad (6\text{-}47)$$

是雙十字槽定向耦合器的過渡衰減。

(c)T形槽定向耦合器

圖6-16(c)的T形槽耦合器，其耦合孔為垂直配置在不同位置的兩個窄長橢圓孔，為討論方便，標上1和2，對於孔

1，有 $x\approx 0$，$\varphi=0$ 和 $\psi=0$。因此，式（6-37）變成

$$a_\pm^{(1)}=j\frac{\omega}{2}\left[\mu_0(M_lR_\pm-M_lQ_\pm)+\varepsilon_0PE_y^0E_{y\pm}^0\right] \quad (6\text{-}48)$$

而，在 $x_0=0$ 處，由式（6-38）和(6-32)，有

$$\begin{aligned}&Q_\pm=0\\&R_\pm=H_{z'\pm}^0H_z^0=H_z^0H_z^0=\frac{\lambda\lambda_g}{2\eta a^3b}\\&E_{y'\pm}^0=E_y^0=0\end{aligned} \quad (6\text{-}49)$$

將式（6-49）代入式(6-48),得

$$a_\pm^{(1)}=j\frac{\beta M_l}{ab}\left(\frac{\lambda_g}{2a}\right)^2$$

對於孔2，有 $x_0=a/2$，$\varphi=0°$ 和 $\psi=90°$。因此，式（6-37）變成

$$a_\pm^{(2)}=j\frac{\omega}{2}\left[\mu_0(M_lR_\pm-M_lQ_\pm)+\varepsilon_0PE_y^0E_{y'\pm}^0\right] \quad (6\text{-}50)$$

而在 $x_0=a/2$ 處，由式（6-38）和（6-32）,有

$$Q_{\pm}=H_{z\pm}^{0}H_{z}^{0}=\pm H_{z}^{0}H_{z}^{0}=\mp\frac{2\lambda}{\eta\lambda_{g}ab}$$
$$R_{\pm}=0$$
$$E_{y'\pm}^{0}E_{y}^{0}=E_{y}^{0}E_{y}^{0}=-\frac{2\eta\lambda_{g}}{ab\lambda} \qquad (6\text{-}51)$$

將（6-51）代入式（6-50），得

$$a_{\pm}^{(2)}=j\frac{\beta}{ab}\left[\pm M_{l}-P\left(\frac{\lambda_{g}}{\lambda}\right)^{2}\right]$$

所以，採用T形槽耦合孔，並令P＝0時，有

$$A_{\pm}=a_{\pm}^{(1)}+a_{\pm}^{(2)}=j\frac{\beta M_{l}}{ab}\left[\left(\frac{\lambda_{g}}{2a}\right)^{2}\pm 1\right] \qquad (6\text{-}52)$$

從而，可得C和D分別為

$$C=-20\lg\left|A_{+}\right|=-20\lg\left|\frac{\beta M_{l}}{ab}\left[\left(\frac{\lambda_{g}}{2a}\right)^{2}\pm 1\right]\right|$$
$$D=20\lg\left|\frac{\lambda_{g}^{2}+4a^{2}}{\lambda_{g}^{2}-4a^{2}}\right| \qquad (6\text{-}53)$$

可見，當$\lambda_{g}=2a$時，可得理想的方向性。

1. 耦合孔在波導窄壁上

設二根矩形波導平行，公共壁是窄邊，並通過半徑為r的小圓孔耦合起來，如圖6-21所示。由於小孔窄壁上，該處的坐標是 $x=a, x'=0$，因此由式（6-32）可見，只有z方向的磁場不為零，即 $H_{x}=-H_{x\pm}=-\sqrt{\frac{1}{2\eta}}\sqrt{\lambda\lambda_{g}}\frac{1}{a\sqrt{ab}}$，這樣，有

$$\vec{H}_{1}^{0}=H_{z}^{0}\vec{z},\vec{t}\cdot\vec{H}_{1}^{0}=0,\vec{l}\cdot\vec{H}_{1}^{0}=H_{z}^{0}$$
$$\vec{H}_{2\pm}^{0}=H_{z\pm}^{0}\vec{z},\vec{H}_{2\pm}^{0*}=H_{z\pm}^{0}\vec{z}$$
$$\vec{t}\cdot\vec{H}_{2\pm}^{0}=0,\vec{l}\cdot\vec{H}_{2\pm}^{0}=H_{z\pm}^{0}$$

於是，由式（6-34）可得

$$a_{\pm}=j\frac{\omega}{2}\left[-\mu_{0}H_{x}^{02}M_{l}\right]=-j\frac{2\pi r^{3}\lambda_{g}}{3a^{3}b} \qquad (6\text{-}54)$$

由此可見，窄邊圓孔耦合是方向性的，單一孔不能構成定向耦合器。

4. 多孔定向耦合器

多孔定向耦合器是為改善單孔定向耦合器的過渡衰減大、頻帶較窄、方向性不高等缺點而提出的。它是在兩根平行波導的公共壁上沿軸向等距地開一排或兩排耦合槽孔，其結構如圖6-22所示。耦合槽孔可以位於波導的寬壁上，也可以位於窄壁上；孔形可以是圓形的、橢圓形的，或者是T形的；各耦合孔的大小或者相同，即均勻分佈的，或者按一定規律變化，即不均勻分佈的；耦合孔可以是無方向性孔，也可以是方向性孔。

為了說明多元定向耦合器的特性，下面以均勻n孔弱耦合定向耦合器（圖6-23）為例加以分析，要注意的是，在這種弱耦合器中，當波從主波導端口1到端口2的傳輸過程中，沿途經過n個小孔的耦合，其幅度是在逐漸衰減的。但考慮到各孔耦

合很弱，衰減不大，以致可以認為在此種耦合過程中，波的幅度是恆定的。因此，計算時可令各孔耦合到副波導正負方向的傳輸係數的大小分別相等，即

$$|a_{1+}|=|a_{2+}|=\cdots=|a_{n+}|$$
$$|a_{1-}|=|a_{2-}|=\cdots=|a_{n-}|$$

這樣，若將第1孔處入射波的初相算作零，則由第1孔到副波導第n孔中心處的輸出波是$a_+e^{-j(n-1)\theta}$；由的2孔到副波導第n孔中心的輸出波是$a_+e^{-j\theta}e^{-j(n-2)\theta}=a_+e^{-j(n-1)\theta}$；如此類推，其餘各孔到副波導第n孔中心處的輸出波都是$a_+e^{-j(n-1)\theta}$。這樣一來，端口4的總輸出為

$$A_+=\sum_{i=1}^{n}a_+e^{-j(n-1)\theta}=na_+e^{-j(n-1)\theta} \qquad (6\text{-}55)$$

式中$\theta=\frac{2\pi}{\lambda_g}d$。而d為相鄰兩孔的間距。

同理，由各孔耦合到副波導端口3、第1孔中心處的總輸出為

$$A_-=a_-(1+e^{-j2\theta}+e^{-j4\theta}+\cdots+e^{-j2(n-1)\theta})$$
$$=\frac{a_-\sin n\theta}{\sin\theta}e^{-j(n-1)\theta} \qquad (6\text{-}56)$$

於是，這種多孔定向耦合器的過渡衰減和方向性分別為

$$C=-20\lg|A_+|=C_1-20\lg n(dB) \qquad (6\text{-}57)$$

$$D=20\lg\left|\frac{A_+}{A_-}\right|=D_1+20\lg\left|\frac{n\sin\theta}{\sin n\theta}\right|(dB) \qquad (6\text{-}58)$$

式中$C_1=-20\lg|A_+|$是單孔的過渡衰減，$D_1=20\lg\left|\frac{a_+}{a_-}\right|$是耦合孔本身的方向性，若為窄壁耦合，則$D_1=0$。從式（6-58）看出，理想方向性條件要求$\sin n\theta=0$，這只有在$d=\lambda_g/4$，n = 偶數的條件下才可能。

三、3dB裂縫電橋

3dB裂縫電橋其實是過渡衰減為3dB的定向耦合器。它由二根平行波導的公共窄邊上開出長為L的裂縫，以進行電磁耦合而成，結構如圖6-24所示。其特性是：當電場幅度為U_1的TE_{10}波從端口1入射時，將在2，4端口間實現等功率輸出，且兩者相差為90^o而端口3無能量輸出。圖6-24中耦合段寬壁尺寸2a ' <2a是為提高電橋的上限工作排列，抑制H_{30}模的出現而採取的措施；耦合段中心的可調螺釘，則用以改變電磁波傳輸的相位，以實現3dB的耦合。由於該電橋的耦合機構與一般單孔或多孔定向耦合器不同，故其工作原理也異。

為了說明3dB裂縫電橋的工作原理，我們採用理想電路，即2a ' = 2a，且調配螺釘不存在的情況。由於1端口輸入幅度為U_1，而3端口輸入為零。因此我們可以將輸入波想像成幅度各為$U_1/2$的偶模波和奇模波的疊加，但又分別加於1端口和3端口上，以激勵裂縫電橋。對於偶模激勵（圖6-25(a)）。在非耦合區的小波導中傳輸的是TE_{10}波，在耦合區的大波導中傳輸的也是TE_{10}（因TE_{10}等高次波不滿足傳輸條件）。但因大、小波導寬邊尺寸不同，它們的截止波長和波導波長也就各異。大波導中TE_{10}波的波導波長為

$$(\lambda_g)_{TE_{10}}=\frac{\lambda}{\sqrt{1-(\frac{\lambda}{4a})^2}} \qquad (6\text{-}59)$$

相位常數為

$$\beta_{10}=\frac{2\pi}{(\lambda_g)_{TE_{10}}}=\frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{1-(\frac{\lambda}{4a})^2} \quad (6\text{-}60)$$

對於奇模激勵（圖6-25b）。小波導中傳輸的是TE $_{10}$波，而大波導中傳輸的是TE $_{20}$波，其波導波長是

$$(\lambda_g)_{TE_{20}}=\frac{\lambda}{\sqrt{1-(\frac{\lambda}{2a})^2}} \quad \textit{(6-61)}$$

相位常數是

$$\beta_{20}=\frac{2\pi}{(\lambda_g)_{TE_{20}}}=\frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{1-(\frac{\lambda}{2a})^2} \quad \textit{(6-62)}$$

大波導中的TE $_{10}$波經過耦合區l後，其相位滯後β $_{10}$ l，而TE $_{20}$波的相位則滯後β $_{20}$ l。因此，兩波間的相位差是

$$\theta=(\beta_{10}-\beta_{20})l \quad \textit{(6-63)}$$

若設參考面T $_1$處偶模波和奇模波的相位均為零，則此二波傳輸導參考面T $_2$處時，其相位分別為 - β $_{10}$ l和 - β $_{20}$ l，而振幅不變。這樣，在端口2的輸出波就是偶模波 $\frac{1}{2}U_1e^{-j\beta_{10}l}$ 和奇模波 $\frac{1}{2}U_1e^{-j\beta_{20}l}$ 疊加，即

$$\begin{aligned}U_2&=\frac{1}{2}U_le^{-j\beta_{10}l}+\frac{1}{2}U_le^{-j\beta_{20}l}\\&=\frac{1}{2}U_le^{-j\beta_{10}l}\left(1+e^{-j\theta}\right)\end{aligned} \quad \textit{(6-64)}$$

而端口4的偶模波為 $\frac{1}{2}U_1e^{-j\beta_{10}l}$ ，奇模波為 - $\frac{1}{2}U_1e^{-j\beta_{20}l}$ ，所以其輸出波是

$$\begin{aligned}U_4&=\frac{1}{2}U_le^{-j\beta_{10}l}-\frac{1}{2}U_le^{-j\beta_{20}l}\\&=\frac{1}{2}U_le^{-j\beta_{10}l}\left(1-e^{-j\theta}\right)\end{aligned} \quad \textit{(6-65)}$$

由式（6-64）和式（6-65）可得

$$\frac{U_2}{U_4}=\frac{1+e^{-j\theta}}{1-e^{-j\theta}}=jctg\frac{\theta}{2} \quad \textit{(6-66)}$$

可見，該電橋的兩個輸出相位差90 ^{o} 。當幅度之比為 $ctg\frac{\theta}{2}=1$ 時，即為3dB裂縫電橋，且

$\theta=(\beta_{10}-\beta_{20})l=\frac{\pi}{2}$

或

$$l = \frac{\pi}{2(\beta_{10} - \beta_{20})} = \frac{\frac{\lambda}{4}}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{4a}\right)^2} - \sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}} \quad (6\text{-}67)$$

如果裂縫電橋的特性是理想的，則在適當選擇端口的參考面後，其散射矩陣可表為

$$[S] = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -j \\ 1 & 0 & -j & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -j & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6\text{-}68)$$

四、雙T接頭

雙T接頭由E－T接頭和H－T接頭組合而成，並以P為對稱面，如圖6-26所示。若在臂2，4內的參考面選擇得與P等距離，則根據網絡的互易性，類似於E－T，H－T接頭的分析應有

$$S_{ij} = S_{ji}, S_{22} = S_{44}, S_{14} = S_{12}, S_{23} = -S_{34}$$

另外，當H_{10}波由3臂輸入時，在對稱面P上將為H_{10}波電場的波節點，從而在臂1內將不可能有能量輸出，即$S_{10}=0$。這樣，雙T的散射矩陣可以寫作

$$[S] = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 & S_{12} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ 0 & S_{23} & S_{33} & -S_{23} \\ S_{12} & S_{24} & -S_{23} & S_{22} \end{bmatrix} \quad (6\text{-}69)$$

由無耗網絡散射矩陣酉特性：[S*][S] = [1]，得

$$|S_{11}|^2 + 2|S_{12}|^2 = 1 \quad (6\text{-}70a) \qquad |S_{33}|^2 + 2|S_{23}|^2 = 1 \quad (6\text{-}70b)$$

$$S_{12}S_{11}^* + S_{22}S_{12}^* + S_{24}S_{12}^* = 0 \quad (6\text{-}70c) \qquad S_{24}S_{23}^* - S_{23}S_{33}^* - S_{22}S_{23}^* = 0 \quad (6\text{-}70d)$$

等等。雙T接頭的一個重要應用是作為調配元件，如圖6-27所示。設雙T的端口2接信號源，端口4接待匹配的任意負載，端口1（H臂）和3（E臂）分別接短路活塞，只要適當地調節這兩個短路活塞，總可以使得從端口2向負載方向看入的反射係數Γ2＝0，而呈現匹配狀態。為了證明這一點，我們假定，經調節兩個短路活塞後，端口2已或匹配，即Γ2＝0，求出這時負載反射係數Γ4，應滿足什麼條件。為此，對於圖6-27的電路，根據上一章等效電源法，可寫出從而求得負載反射係數為

$$\Gamma_4 = \frac{D_{(2S2)(44)}}{D_{(2S2)(4S4)}} \quad (6\text{-}71)$$

而

$$D_{(2S2)(44)} = \begin{vmatrix} 1-S_{11}e^{j\varphi_1} & S_{12} & 0 \\ -S_{12}e^{j\varphi_1} & S_{22} & -S_{23}e^{j\varphi_3} \\ 0 & S_{23} & 1-S_{33}e^{j\varphi_3} \end{vmatrix} = S_{22} + \frac{S_{12}^2 e^{j\varphi_1}}{1-S_{11}e^{j\varphi_1}} + \frac{S_{23}^2 e^{j\varphi_3}}{1-S_{33}e^{j\varphi_3}} \quad (6\text{-}72)$$

$$D_{(2S2)(4S4)}=\begin{bmatrix}1-S_{11}e^{j\varphi_1} & S_{12} & 0 & S_{12}\\ -S_{12}e^{j\varphi_1} & S_{22} & -S_{23}e^{j\varphi_3} & S_{24}\\ 0 & S_{23} & 1-S_{33}e^{j\varphi_3} & -S_{23}\\ -S_{12}e^{j\varphi_1} & S_{24} & S_{23}e^{j\varphi_3} & S_{22}\end{bmatrix}$$

$$=\left(S_{22}^2-S_{24}^2\right)+\left(S_{22}-S_{24}\right)\frac{2S_{12}^2e^{j\varphi_1}}{1-S_{11}e^{j\varphi_1}}+\left(S_{22}+S_{24}\right)\frac{2S_{23}^2e^{j\varphi_3}}{1-S_{33}e^{j\varphi_3}}$$

$$+\frac{4S_{12}^2S_{23}^2e^{j(\varphi_1+\varphi_3)}}{\left(1-S_{11}e^{j\varphi_1}\right)\left(1-S_{33}e^{j\varphi_3}\right)} \qquad (6\text{-}73)$$

式（6-72）和（6-73）中$e^{j\varphi_1}$和$e^{j\varphi_3}$為兩個短路活塞的反射係數。現令θ $_{12}$和θ $_{23}$分別表示S $_{12}$和S $_{23}$的相位，並註意到式(6-70)的關係，可得

$$S_{12}^2=|S_{12}|^2e^{j2\theta_{12}}=\frac{1}{2}\left(1-|S_{11}|^2\right)e^{j2\theta_{12}}$$

$$S_{23}^2=|S_{23}|^2e^{j2\theta_{23}}=\frac{1}{2}\left(1-|S_{33}|^2\right)e^{j2\theta_{23}}$$

$$S_{22}+S_{24}=-S_{11}^*e^{j2\theta_{12}}$$

$$S_{22}-S_{24}=-S_{33}^*e^{j2\theta_{23}}$$

$$S_{22}=-\frac{1}{2}\left(S_{11}^*e^{j2\theta_{12}}+S_{33}^*e^{j2\theta_{23}}\right)$$

將這些關係代入式(6-72)和式(6-73)，可得式(6-71)的分子，即

$$D_{(2S2)(44)}=\frac{1}{2}[-S_{11}^*e^{j2\theta_{12}}+\frac{\left(1-|S_{11}|^2\right)e^{j(\varphi_1+2\theta_{12})}}{1-S_{11}e^{j\varphi_1}}$$

$$-S_{33}e^{j\theta_{23}}+\frac{\left(1-|S_{33}|^2\right)e^{j(\varphi_3+2\theta_{23})}}{1-S_{33}e^{j\varphi_3}}]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1-S_{11}^*e^{-j\varphi_1}}{1-S_{11}e^{j\varphi_1}}e^{j(\varphi_1+2\theta_{12})}+\frac{1-S_{33}^*e^{-j\varphi_3}}{1-S_{33}e^{j\varphi_3}}e^{j(\varphi_3+2\theta_{23})}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[e^{j(\phi_1+\varphi_1+2\theta_{12})}+e^{j(\phi_3+\varphi_3+2\theta_{23})}\right] \qquad (6\text{-}74)$$

式中$\frac{1-S_{11}^*e^{-j\varphi_1}}{1-S_{11}e^{j\varphi_1}}$和$\frac{1-S_{33}^*e^{-j\varphi_3}}{1-S_{33}e^{j\varphi_3}}$都是模值為1的複數，已分別令而式(6-71)的分母則為：

$$D_{(2S2)(4S4)} = S_{11}^{*} S_{33}^{*} e^{j2(\theta_{12}+\theta_{23})} - \frac{2S_{12}^{2} e^{j\varphi_1}}{1-S_{11}e^{j\varphi_1}} S_{33}^{*} e^{j2\theta_{23}} - \frac{2S_{23}^{2} e^{j\varphi_3}}{1-S_{33}e^{j\varphi_3}} S_{11}^{*} e^{j2\theta_{12}} + \frac{4S_{12}^{2}S_{23}^{2} e^{j(\varphi_1+\varphi_3)}}{\left(1-S_{11}e^{j\varphi_1}\right)\left(1-S_{33}e^{j\varphi_3}\right)}$$

$$= \left(S_{11}^{*} e^{j2\theta_{12}} - \frac{2S_{12}^{2} e^{j\varphi_1}}{1-S_{11}e^{j\varphi_1}}\right)\left(S_{33}^{*} e^{j2\theta_{23}} - \frac{2S_{23}^{2} e^{j\varphi_3}}{1-S_{33}e^{j\varphi_3}}\right)$$

$$= \left(S_{11}^{*} e^{j2\theta_{12}} - \frac{\left(1-|S_{11}|^{2}\right) e^{j(\varphi_1+2\theta_{12})}}{1-S_{11}e^{j\varphi_1}}\right) \times \left(S_{33}^{*} e^{j2\theta_{23}} - \frac{\left(1-|S_{33}|^{2}\right) e^{j(\varphi_3+2\theta_{23})}}{1-S_{33}e^{j\varphi_3}}\right)$$

$$= \frac{\left(1-S_{11}^{*}e^{-j\varphi_1}\right) e^{j(\varphi_1+2\theta_{12})}}{1-S_{11}e^{j\varphi_1}} \times \frac{\left(1-S_{33}^{*}e^{-j\varphi_3}\right) e^{j(\varphi_3+2\theta_{23})}}{1-S_{33}e^{j\varphi_3}}$$

$$= e^{j(\phi_1+\varphi_1+2\theta_{12}+\phi_3+\varphi_3+2\theta_{23})} \qquad (6\text{-}75)$$

由式(6-74)和式(6-75)，可得

$$\Gamma_4 = \frac{1}{2}\left[e^{-j(\phi_3+\varphi_3+2\theta_{23})} + e^{-j(\phi_1+\varphi_1+2\theta_{12})}\right] \qquad (6\text{-}76)$$

由於 $|\Gamma_4| \le 1$ 所以只要適當調節E臂和H臂短路活塞的位置，使 φ_1 和 φ_3 滿足式(6-76)的關係，都可使 $\Gamma_2 = 0$ 。

五、魔T

若我們在不破壞結構對稱的條件下，在雙T接頭內加入電抗調配元件（螺釘、膜片等），使當其它三端口接匹配負載時，能實現 $S_{33} = 0$ 和 $S_{11} = 0$ ，則這種匹配的雙T稱為魔T。魔T比雙T可貴之處是它具有三分貝定向耦合器特性。下面，我們來證明魔T的如下特性。

(1) $|S_{12}| = |S_{23}|$。這表明當 $S_{11} = S_{33} = 0$ 時，①，③臂與②臂間的傳輸係數是相等的，即如有能量由②臂進入，則將等分到臂①和臂③中去。

證明：在魔T的情況下，有 $S_{11} = S_{33} = 0$ ，於是由式（6-70a）和（6-70b），可得

$$2|S_{12}|^{2} = 1, 即 S_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j\varphi}$$

$$2|S_{23}|^{2} = 1, 即 S_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j\varphi}$$

$$|S_{23}| = |S_{12}| = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad (6-77)$$

(2) $S_{22} = S_{44} = S_{24} = 0$。這表明當 $S_{11} = S_{33} = 0$ 時，則自②，④臂看入接頭也是匹配的，而且此時②，④臂是互相隔離的。

證明：當 $S_{11} = S_{33} = 0$ 時，雙T的散射矩陣（6 - 69）可寫成

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & S_{12} & 0 & S_{12} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ 0 & S_{23} & 0 & -S_{23} \\ S_{12} & S_{24} & -S_{23} & S_{22} \end{bmatrix} \qquad (6-78)$$

於是，由散射矩陣的酉特性，式（6 - 78）的第二行元素應滿足

$$|S_{12}|^{2} + |S_{22}|^{2} + |S_{23}|^{2} + |S_{24}|^{2} = 1$$

再計及式（6 - 77），可得

$S_{22} = S_{24} = 0$

於是，魔T的散射矩陣是

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}e^{j\varphi} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}e^{j\varphi} \\ \frac{1}{\sqrt{2}e^{j\varphi}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}e^{j\varphi}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}e^{j\varphi}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{j\varphi} \\ \frac{1}{\sqrt{2}e^{j\varphi}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}e^{j\varphi}} & 0 \end{bmatrix}$$

適當地選擇①，③臂內參考面，上式還可以寫成

$$[S] = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6-79)$$

要注意的是：如果不是在①，③臂內加入匹配元件，而是在②，④臂內加入匹配元件，以實現 $S_{22} = S_{44} = 0$，則在結構對稱性仍保持的條件下，雙T的散射矩陣是

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 & S_{12} \\ S_{12} & 0 & S_{23} & S_{24} \\ 0 & S_{23} & S_{33} & -S_{23} \\ S_{12} & S_{24} & -S_{23} & 0 \end{bmatrix} \quad (6-80)$$

於是，由散射矩陣的酉特性，可得

$$\begin{aligned} &|S_{11}|^2 + 2|S_{12}|^2 = 1 \\ &|S_{33}|^2 + 2|S_{23}|^2 = 1 \\ &|S_{12}|^2 + |S_{23}|^2 + |S_{24}|^2 = 1 \\ &|S_{12}|^2 - |S_{23}|^2 = 0 \end{aligned} \quad (6-81)$$

從而，可解得

$$\begin{aligned} &|S_{12}| = |S_{23}| \\ &|S_{11}| = |S_{33}| \\ &|S_{11}| = |S_{24}| \end{aligned}$$

這就表明，當 $S_{22} = S_{44} = 0$ 時，①，③臂與②臂間的傳輸係數也是相等的；而①，③臂的輸入反射係數雖然相等，但不一定為零，即不一定匹配；這時，②，④臂間也不一定相互完全隔離。

從上面的分析可知，要保證①，③兩臂和②，④兩臂之間是相互隔離的（即為一定向耦合器），則必備的條件是 $S_{11} = S_{33} = 0$，而不是 $S_{22} = S_{44} = 0$。因為具備了 $S_{11} = S_{33} = 0$ 的條件之後，則自動滿足 $S_{22} = S_{33} = 0$，也就必然是一定向耦合器。然而，若只具備 $S_{22} = S_{44} = 0$ 的條件，卻不一定有 $S_{11} = S_{33} = 0$。因此，保證實現雙T在結構上的嚴格對稱性，以及在臂①和臂③中設置匹配元件是最為重要的。

直通的②，④兩臂在$S_{11}=S_{33}=0$的條件下，可以實現完全隔離，即兩臂間的傳輸係數$S_{24}=0$，這一結論在直觀上是難以看出的，甚至是難以置信的，但理論分析及試驗都表明了這一結論的正確性。

如上所述，只要在雙T接頭的E臂和H臂加上匹配元件以消除反射，就可以實現魔T接頭。但至今為止，魔T匹配元件的設計尚無精確的設計公式，幾乎都是利用定性分析，憑藉經驗，通過實驗進行反複調整來完成的。目前常用到的魔T具有H臂和E臂差不多相同的頻率特性，頻帶較寬，且有結構簡單，調整容易等優點。

魔T在微波技術中有廣泛的應用。現舉例說明如下。

例1魔T用作微波電橋。

如圖6－29所示，端口1接匹配信號源，端口3接匹配的檢波器，標準阻抗Z_s和待測阻抗（與其對應的反射係數為Γ_2和Γ_4）分別接於離對稱面P等距的端口2和4。對於圖6－29的魔T微波電橋，其信號流圖如圖6－30所示（圖中$C=\frac{1}{\sqrt{2}}$）。可見從b_G到b_3僅有兩條通路，而沒有環，於是有

$$T=\frac{b_3}{b_{G_1}}=C^2\Gamma_2-C^2\Gamma_4$$

即

$$b_3=\frac{1}{2}(\Gamma_2-\Gamma_4)b_{G_1} \quad (6\text{-}82)$$

由式（6－82）可見，當$\Gamma_2=\Gamma_4$，即$Z_S=Z_x$時，檢波器指示為零，電橋平衡；當檢波器指示非零時，電橋失衡，表示$Z_S\neq Z_x$。

例2．魔T作為移相器

作為移相器的魔T，其裝置如圖6－31所示。可見與前例相似，不同的是用兩個短路活塞代替Z_S和Z_x,且它們離參考面距離相差四分之一波導波長，即$\Gamma_2=-e^{-j2\beta l}$和$\Gamma_4=e^{-j2\beta l}$。這樣，由式（6－82）可得

$$b_3=-\frac{1}{2}(e^{-j2\beta l}+e^{-j2\beta l})b_{G_1}=-e^{-j2\beta l}b_{G_1}$$

上式表明:當魔T的2，4端口的短路活塞同步移動時，1，3端口間相當於一個移相器。

(3)魔T在四端口反射儀中的應用

用一隻魔T可組成四端口反射儀。它是四端口技術與計算機相結合的產物，用以實現反射係數（或阻抗）的自動測量，如圖6－32所示。與六端口反射儀相比，四端口反射儀的結構特別簡單，除用魔T作四端口外，只有一個檢波器和一個短路活塞。下面我們來分析其測量原理。

若$\Gamma_1-\Gamma_4$是魔T四個端口所接器件的反射係數，而非理想魔T的S參數為

$$[S]=\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{bmatrix}$$

則信號源電壓波b_g和魔T端口4的功率讀數P_4之間有如下關係

$$P_4=\left[\frac{K_1\Gamma_2\Gamma_3+K_2\Gamma_2+K_3\Gamma_3+K_4}{K_5\Gamma_2\Gamma_3+K_6\Gamma_2+K_7\Gamma_3+1}\right]^2 \quad (6-83)$$

式中，$K_1 - K_7$是系統參數，它們可用三個負載（短路板、短路活塞和近似匹配負載）由校正求得，且為

$$\begin{aligned}
K_1 &= b_{g_1} S^D_{(14)} / K_8 \\
K_2 &= b_{g_1} S^D_{(14)(33)} / K_8 \\
K_3 &= b_{g_1} S^D_{(14)(22)} / K_8 \\
K_4 &= b_{g_1} S^D_{(41)} / K_8 \\
K_5 &= [S^D_{(11)(44)} - \Gamma_1 S^D_{(44)} - \Gamma_4 S^D_{(11)} + \Gamma_1\Gamma_4 S^D] / K_8 \\
K_6 &= -[S_{22} - \Gamma_1 S^D_{(44)(33)} - \Gamma_4 S^D_{(11)(33)} + \Gamma_1\Gamma_4 S^D_{(33)}] / K_8 \\
K_7 &= -[S_{33} - \Gamma_1 S^D_{(44)(22)} - \Gamma_4 S^D_{(11)(22)} + \Gamma_1\Gamma_4 S^D_{(22)}] / K_8 \\
K_8 &= 1 - \Gamma_1 S_{11} - \Gamma_4 S_{44} + \Gamma_1\Gamma_4 S^D_{(22)(44)}
\end{aligned}$$

而$S^D = \det[S]$，$S^D_{(14)}$和$S^D_{(14)(22)}$是S^D的特殊行列式。

另一方面，若令

$$\begin{aligned}
A &= K_1\Gamma_2 + K_3 \\
B &= K_2\Gamma_2 + K_4 \\
C &= K_5\Gamma_2 + K_7 \\
D &= K_6\Gamma_2 + 1
\end{aligned}$$

和待側反射係數

$\Gamma_3 = x + jy$

則式（6 - 83）可寫作

$P_4 = \left|\left(A\Gamma_3 + B\right) / \left(C\Gamma_3 + D\right)\right|^2$ （6-84）

上式經適當整理後，可變成如下的圓方程

$\left(x+u\right)^2 + \left(y+v\right)^2 = r^2$ （6-85）

式中

$$\begin{aligned}
u &= \frac{P_4 \operatorname{Re}(C^* D) - \operatorname{Re}(BA^*)}{P_4 |C|^2 - |A|^2} \\
v &= \frac{P_4 \operatorname{Im}(C^* D) - \operatorname{Im}(BA^*)}{P_4 |C|^2 - |A|^2} \\
r^2 &= \left[\frac{\sqrt{P_4}\, |DA - BC|}{P_4 |C|^2 - |A|^2}\right]^2
\end{aligned}$$

這樣，當端口2的短路活塞置於兩相距為$\lambda_g / 6$的三個位置上，並相應測出檢波器功率讀數P_4時，就可以在復平面上確定三個圓，它們交點的坐標x，y便是待求的反射係數。要注意的是，由於測量誤差，上述三圓不可與一點，因此，通常用它們的“根心”作為解（如圖6 - 33），即

$$(x,y)=\left[\frac{\begin{vmatrix}R & R'\\ Q & Q'\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}P & P'\\ Q & Q'\end{vmatrix}};\frac{\begin{vmatrix}R & R'\\ P & P'\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}P & P'\\ Q & Q'\end{vmatrix}}\right]$$

式中，若第I個圓的圓心是（x_i, y_i），半徑是r，則

$$P=2(x_2-x_1), P'=2(x_3-x_1)$$
$$Q=2(y_2-y_1), Q'=2(y_3-y_1)$$
$$R=r_1^2-r_2^2+x_2^2-x_1^2+y_2^2-y_1^2$$
$$R'=r_1^2-r_3^2+x_3^2-x_1^2+y_3^2-y_1^2$$